Topologie Algébrique TD 6

2 Décembre 2011

6 Algèbre Homologique

6.1 Manipulation de complexes

Exercice 6.1 (1) Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens finis. Montrer que $\#M = \#M' \cdot \#M"$ où $\#M$ désigne le cardinal de M.

(2) Déterminer l'ensemble des $\mathbf{Z}$-modules M tels qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Toutes les suites exactes ainsi obtenues sont-elles scindées ? Que se passe-t-il si on considère des suites exactes de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-modules ?

Exercice 6.2 On considère une longue suite exacte

$$0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{f^0} M^1 \xrightarrow{f^1} \dots \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \longrightarrow 0$$

de k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i \geq 0} \dim(M^{2i}) = \sum_{i \geq 0} \dim(M^{2i+1}).$$

Exercice 6.3 (Lemme des cinq) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

(1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.

(2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.

(3) si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exercice 6.4 (Lemme du Serpent) Soit A un anneau commutatif. On considère le diagramme commutatif de complexes de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[d, "d''"] \\
N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N''.
\end{tikzcd} \tag{1}$$

En particulier $p \circ u = 0 = q \circ v$.

(1) Montrer que u, p et v, q induisent des applications linéaires naturelles $\widetilde{u} : \ker d' \to \ker d$, $\widetilde{p} : \ker d \to \ker d''$, $\overline{v} : \operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ et $\overline{q} : \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\ker d' \arrow[r, "\widetilde{u}"] \arrow[d, hook, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d, hook, "i"] & \ker d'' \arrow[d, hook, "i''"] \\
M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "p"] & M''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, two heads, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & N'' \arrow[d, two heads, "\pi''"] \\
\operatorname{coker} d' \arrow[r, "\overline{v}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\overline{q}"] & \operatorname{coker} d''
\end{tikzcd}$$

(2) Montrer que $\widetilde{p} \circ \widetilde{u} = 0$ et que $\overline{q} \circ \overline{v} = 0$.

(3) Montrer que si u est injective alors $\widetilde{u}$ l'est aussi.
Montrer que si q est surjective alors $\overline{q}$ l'est aussi.

(4) Montrer que si $\ker p = \operatorname{Im} u$ et si v est injective alors $\ker \widetilde{p} = \operatorname{Im} \widetilde{u}$.
Montrer que si $\ker q = \operatorname{Im} v$ et si p est surjective alors $\ker \overline{q} = \operatorname{Im} \overline{v}$.

(5) On suppose maintenant que le diagramme (1) est exact (c'est à dire $\ker p = \operatorname{Im} u$ et $\ker q = \operatorname{Im} v$) et que, de plus, v est injective et p surjective. Montrer alors qu'il existe une application linéaire naturelle $\delta : \ker d'' \to \operatorname{coker} d'$ et que la suite

$$\ker d' \xrightarrow{\widetilde{u}} \ker d \xrightarrow{\widetilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{q}} \operatorname{coker} d''$$

est exacte. Si de plus, u est injective et q est surjective, alors on peut la compléter en une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\widetilde{u}} \ker d \xrightarrow{\widetilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

En pratique l'énoncé (5) est très utile. On l'utilise le plus souvent sous la forme suivante : étant donné un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des suites exactes, on peut compléter de façon naturelle ce diagramme pour obtenir le suivant, appelé diagramme du serpent :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker d' \arrow[r, "\widetilde{u}"] \arrow[d, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d, "i"] & \ker d'' \arrow[d, "i''"] \arrow[ddddll, rounded corners, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"] & 0 \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\overline{q}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

et dans lequel :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\widetilde{u}} \ker d \xrightarrow{\widetilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

(6) Déduire des questions précédentes que, pour toute suite exacte de complexes de chaines (de A-modules)

$$0 \to (C'_\bullet, d') \xrightarrow{f} (C_\bullet, d) \xrightarrow{g} (C"_\bullet, d") \to 0$$

il existe une longue suite exacte *naturelle* de A-modules

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{f} H_n(C) \xrightarrow{g} H_n(C") \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C') \xrightarrow{f} H_{n-1}(C) \to \dots$$
$$\cdots \to H_1(C) \xrightarrow{g} H_1(C") \xrightarrow{\delta} H_0(C') \xrightarrow{f} H_0(C) \xrightarrow{g} H_0(C") \to 0.$$

Exercice 6.5 (Comparaison de deux résolutions) Soit A un anneau commutatif unitaire. Une *résolution* d'un A-module M est un complexe $(P_\bullet, d)$ tel que

- $P_i = 0$ pour tout $i < 0$;
- $H_j(P_\bullet) = 0$ pour tout $j \neq 0$;
- $H_0(P_\bullet) \simeq M$.

Si de plus, les P_i sont des A-modules libres, on dit que c'est une *résolution libre* de M.

1. Montrer que pour chaque A-module M, il existe un A-module libre F tel qu'il existe un morphisme surjectif $F \to M$. Si M est de plus de type fini, on peut prendre F de rang fini.
2. **(Existence)** Montrer que pour tout A-module, il existe une résolution libre.
3. Soient $(P_\bullet, d)$ une résolution libre d'un module M, et $(Q_\bullet, d)$ une résolution d'un autre module N. Si on se donne un morphisme $f : M \to N$, montrer qu'il admet un 'relèvement', *i.e.* un morphisme de complexes $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$, tel que le morphisme induit en homologie est exactement f. Montrer de plus que deux tels relèvements sont homotopes.
4. **(Unicité)** Soient $(P_\bullet, d)$ et $(Q_\bullet, d)$ deux résolution libres, montrer que ils sont homotopes.

Indications:

On peut consulter le livre de Weibel, *Introduction to Homological Algebra*, Chapitre 2, Page 33 ~ 38.

6.2 Ensembles simpliciaux

On note $\Delta := \{[0], [1], \cdots\}$ la catégorie des ordinaux finis non-vides. Un ensemble simplicial est par définition un foncteur $X : \Delta^{op} \to \mathfrak{Set}$. On note $\Delta^{op}\,\mathfrak{Set}$ ou simplement $\hat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On définit le *n-simplexe standard*, noté Δ_n, l'ensemble simplicial représenté par $[n] \in \Delta$, *i.e.* $\Delta_n = h([n])$, où h est le foncteur de Yoneda.

Exercice 6.6 Sous la notation précédente, montrer que

1. $\mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, \Delta_m) = \mathrm{Hom}_{\Delta}([n], [m])$.
2. $\mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, X) = X_n := X([n])$.

Indications:

Ce sont des applications directes du lemme de Yoneda.

Exercice 6.7 (Foncteurs $|-|$ et Sing) Soit $X : \Delta^{op} \to \mathfrak{Set}$ un ensemble simplicial.

1. Rappeler la construction de réalisation $|X|$. Définir un foncteur de *réalisation* :
$$|-| : \hat{\Delta} \to \mathfrak{Top}\,.$$
2. Montrer que le foncteur réalisation admet un adjoint à droite
$$\mathrm{Sing} : \mathfrak{Top} \to \hat{\Delta}\,.$$
3. Soit Y un espace topologique, montrer que l'application naturelle
$$|\,\mathrm{Sing}(Y)| \to Y$$
induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie.

Indications:

1 et 2 sont faciles. Pour 3, il suffit de remarquer que la réalisation d'un ensemble simplicial est toujours un CW-complexe, donc les cohomologies (singulières) de $|\,\mathrm{Sing}(Y)|$ sont isomorphes à ses cohomologies cellulaires, *i.e.* les cohomologies singulières de Y par définition.

Exercice 6.8 (Nerf) Soit $\mathfrak{Cat}$ la catégorie des petites catégories. On a un foncteur naturel $\iota : \Delta \to \mathfrak{Cat}$ qui associe un ordinal fini non-vide $[n]$ la catégorie dont les objets sont $\{0, 1, \cdots, n\}$, et $\mathrm{Hom}(i, j)$ est un point si $i \leq j$, vide si $i > j$.

1. Montrer que $\iota : \Delta \to \mathfrak{Cat}$ est pleinement fidèle, donc on peut voir Δ comme une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Cat}$.

2. On définit un foncteur *nerf* comme le composé de pull-back de préfaisceaux avec le foncteur de Yoneda

$$N = \iota^* \circ h : \mathfrak{Cat} \to \hat{\Delta}$$

plus précisément par la formule suivante :

$$N(\mathscr{C})_n := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Cat}}(\iota([n]), \mathscr{C}),$$

où $\mathscr{C}$ est une petite catégorie quelconque.

(a) Décrire explicitement la structure d'ensemble simplicial du nerf d'une catégorie $\mathscr{C}$ donnée.

(b) Vérifier que $N \circ \iota([n]) = \Delta_n$.

3. Montrer que le foncteur nerf N admet un adjoint à gauche $\tau_1 : \hat{\Delta} \to \mathfrak{Cat}$, appelée *la catégorie fondamentale* d'un ensemble simplicial.

4. Montrer que le foncteur nerf $N : \mathfrak{Cat} \to \hat{\Delta}$ est pleinement fidèle, autrement-dit, $\tau_1 \circ N$ est isomorphe au foncteur d'identité. Donc on peut voir la catégorie $\mathfrak{Cat}$ des petites catégories comme une sous-catégorie pleine de la catégorie $\hat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux.

5. ***(Théorème de Grothendieck-Segal)** Soit X un ensemble simplicial, il est dans l'image essentiel de N (*i.e.* il existe une petite catégorie sC telle que $X \simeq N(\mathscr{C})$), si et seulement si $X \simeq N\tau_1(X)$, si et seulement si pour tout $n \geq 2$, l'application naturelle $X_n = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, X) \to \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(I_n, X)$ est bijective, où I_n est l'ensemble simplicial d'une 'chaine' de longueur n.

Indications:

1. Évident.

2. (a) Un élément de $N(\mathscr{C})_n$ est une chaine de flèches composables dans $\mathscr{C}$. Les morphismes de faces :

$$\partial_0(f_n, \cdots, f_1, f_0) = (f_n, \cdots, f_1);$$

$$\partial_n(f_n, \cdots, f_1, f_0) = (f_{n-1}, \cdots, f_0);$$

et pour $0 < i < n$,

$$\partial_i(f_n, \cdots, f_1, f_0) = (f_n, \cdots, f_{i+1}, f_i \circ f_{i-1}, f_{i-2}, \cdots f_0).$$

Les morphismes de dégénésances :

$$\delta_i(f_n, \cdots, f_1, f_0) = (f_n, \cdots, f_{i+1}, \mathrm{id}, f_i, \cdots, f_0).$$

C.f. Jacob Lurie *Higher Topos Theory*, Page 18.

3. C.f. Jacob Lurie *Higher Topos Theory*, Page 33.

4. C.f. Jacob Lurie *Higher Topos Theory*, Page 18, Prop 1.1.2.2.

Exercice 6.9 (Dold-Kan Équivalence) On va établir une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{Ab})$ des complexes de groupes abéliens de degré positif et la catégorie $\Delta^o(\mathfrak{Ab})$ des groupes abéliens simpliciaux, dû à Dold-Kan. Par définition, un *groupe abélien simplicial* est un foncteur contravariant de la catégorie Δ des ordinaux finis vers la catégorie $\mathfrak{Ab}$ des groupes abéliens.

1. **(Complexes normalisés)** Si on se donne un groupe abélien simplicial $X_\bullet \in \Delta^o(\mathfrak{Ab})$, on lui associe un complexe de degré positif $C_\bullet$ suivant, appelé son *complexe normalisé* :

$$C_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\partial_i : X_n \to X_{n-1}),$$

et le différentiel $d_n : C_n \to C_{n-1}$ est induit par $\partial_0 : X_n \to X_{n-1}$. Vérifier que $(C_\bullet, d)$ est bien un complexe, et la construction est fonctorielle.

2. Soit $(C_\bullet, d)$ un complexe de degré positif. On lui associe un groupe abélien simplicial suivant :

$$X_n = \bigoplus_{[n]\twoheadrightarrow[k]} C_k,$$

et pour toute application croissante $\rho : [m] \to [n]$, le morphisme

$$X_n = \bigoplus_{[n]\twoheadrightarrow[k]} C_k \to X_m = \bigoplus_{[m]\twoheadrightarrow[j]} C_j$$

en composante $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ est défini par la composition :

$$C_k \xrightarrow{d^{k-s}} C_s \hookrightarrow \bigoplus_{[m]\twoheadrightarrow[j]} C_j = X_m,$$

où la deuxième flèche est l'inclusion du facteur direct correspond à $[m] \twoheadrightarrow [s]$, où $[m] \twoheadrightarrow [s] \hookrightarrow [k]$ est l'unique epi-mono décomposition de la composition $\sigma \circ \rho : [m] \to [n] \to [k]$. Vérifier que $X_\bullet$ est bien un groupe abélien simplicial, et de plus la construction est fonctorielle.

3. Montrer que les deux foncteurs construits ci-dessus sont inverses l'un de l'autre.

Indications:
C.f. Charles Weibel *Introduction to homological algebra* Chapitre 8.